

**“Технология построения моделей
процессов и объектов
автоматизированного управления”**

*Курс лекций профессора
Л.И.Григорьева*

Тема 1. Методические аспекты курса

Необходимым условием построения эффективной системы автоматизированного управления любым объектом, либо процессом, будь то технологические процессы или организационно-экономические системы, является глубокое знание объекта, позволяющее построить адекватные модели и в дальнейшем перейти на их основе к алгоритмам управления.

Без исходной информации, отражающей характеристики объекта управления и суть протекающих в них процессов, построить систему управления невозможно.

На практике, имеющейся информации недостаточно, а кроме того исходная информация об объекте разнообразна; она может быть инструментальной, статистической, нечеткой, текстовой.

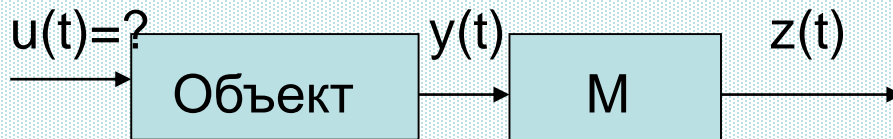
Между требуемой (согласно задачам управления) информацией и имеющейся почти всегда существует разрыв. В этих условиях важным представляется достижение компромисса между располагаемой информацией и функциональными требованиями, необходимыми для осуществления эффективного управления объектом или процессом.

- Целью курса является освоения студентами широкого спектра математических моделей, а также технологии решения на основе этих моделей прикладных задач для интегрированных автоматизированных систем управления в зависимости от поставленной проблемы и характера имеющейся информации (инструментальной, статистической, нечеткой). Курс призван обеспечить будущих специалистов методологией проведения системного анализа технологических процессов и организационно-экономических объектов управления и соответствующими знаниями и умениями для правильного выбора математической модели и использования программного обеспечения.
- По окончании курса студенты должны **уметь** строить регрессионные модели, проводить корреляционный анализ, решать с помощью дискриминантного и кластерного анализа задачи классификации, проводить нечеткое моделирование, строить динамические детерминированные модели управления (модели в пространстве состояний), оценивать наблюдаемость и управляемость систем, устойчивость. Рассматриваются актуальные вопросы инжиниринга качества.
- Изучаются базовые алгоритмы используемых в большинстве математических пакетов для построения моделей при проектировании и эксплуатации автоматизированных систем управления. Особое внимание в ходе изложения курса уделяется постановкам конкретных задач из нефтегазовой отрасли, для решения которых целесообразны рассматриваемые модели и алгоритмы. Схематично основная идея курса имеет следующую логическую последовательность: от особенностей исходной информации и поставленных для реализации автоматизированного управления задач к выбору математической модели, изучению алгоритма построения расчетных схем и, в конечном итоге, к применению соответствующего стандартного программного обеспечения и анализу полученных результатов для целей управления.

Классификация задач управления.

Рассмотрим типовые задачи управления, которые в первую очередь определяют разнообразие моделей.

1. Задачи детерминированного управления.



М - измерительное устройство

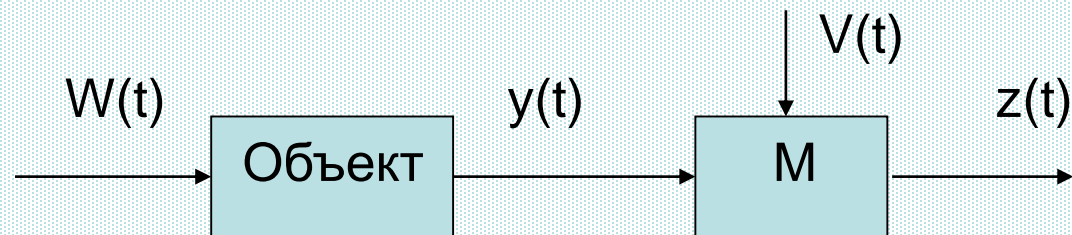
Дано

Соотношения между $z(t)$ и $y(t)$ и между $y(t)$ и $u(t)$.

Цель

Найти такое управление $u(t)$, чтобы $y(t)$ или $z(t)$ были бы как можно ближе к желаемому. Данная трактовка предполагает наличие некоторого критерия. Кроме того сделано допущение об отсутствии случайных факторов. Для такого рода задач управления чаще всего объект описывается дифференциальными уравнениями.

2. Задачи оценки.



$W(t)$ - вектор действующих на систему шумов.

$V(t)$ - вектор шумов измерений.

Дано

Соотношения между $z(t)$ и $y(t)$, $V(t)$
 $y(t)$ и $W(t)$;

Статистическое описание $V(t)$ и $W(t)$.

Проводятся замеры на некотором интервале времени T .

t - текущее время;

$t = T$ - задача фильтрации;

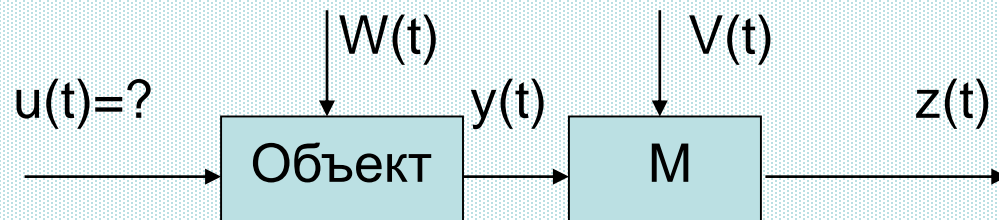
$t > T$ - задача предсказания или прогнозирования;

$t < T$ - задача сглаживания;

Цель

Найти такие оценки $\hat{y}(t|T)$, которые являются лучшими в некотором смысле.

3. Задача стохастического управления.



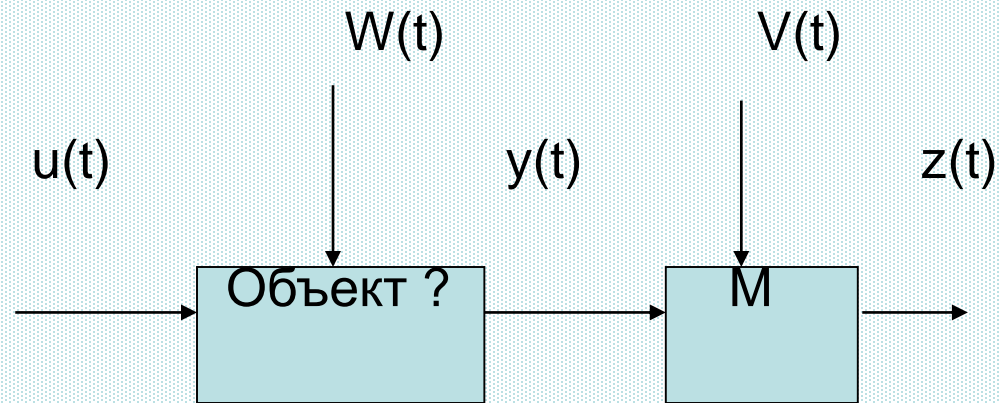
Дано

Соотношения между $z(t)$ и $y(t)$, $V(t)$
 $y(t)$ и $u(t)$, $W(t)$;
Статистическое описание $V(t)$ и $W(t)$.

Цель

Найти такое управление $u(t)$, чтобы некоторая оценка $\hat{y}(t)$ была близка к желаемому.

4. Задача идентификации.



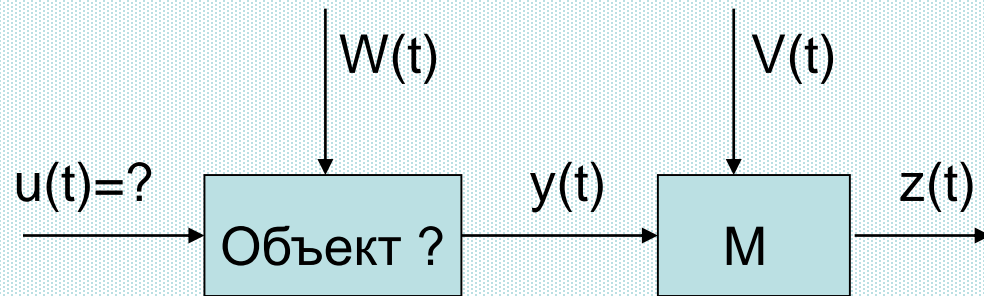
Дано

Соотношения между $z(t)$ и $y(t)$, $V(t)$
Статистическое описание $V(t)$ и $W(t)$.
Измеряются $z(t)$ и $u(t)$

Цель

Определить лучшую в некотором смысле модель объекта.
Для решения задачи идентификации наиболее распространенной моделью служат регрессионные уравнения.

5. Задача адаптивного управления.



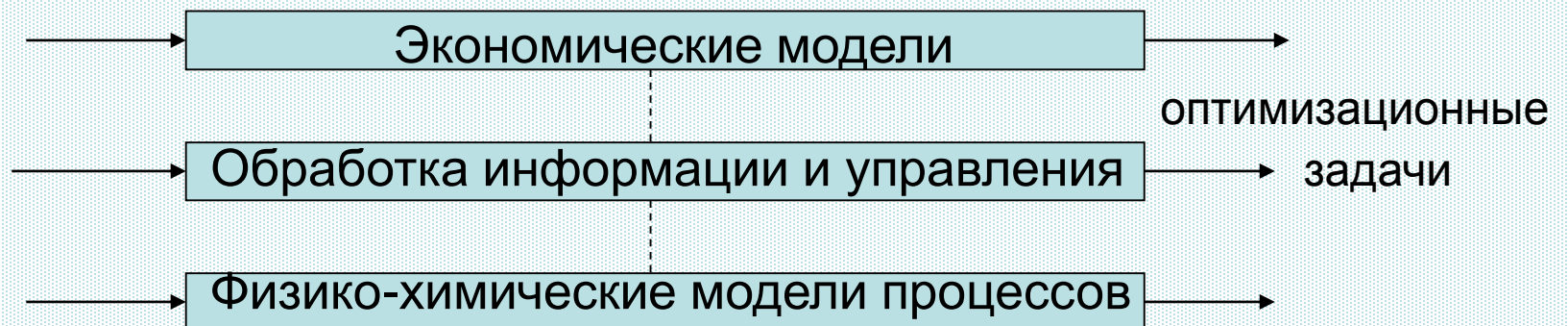
Дано

Соотношения между $z(t)$ и $y(t)$, $V(t)$
Статистическое описание $V(t)$ и $W(t)$.
Измеряются $z(t)$ и $u(t)$

Цель

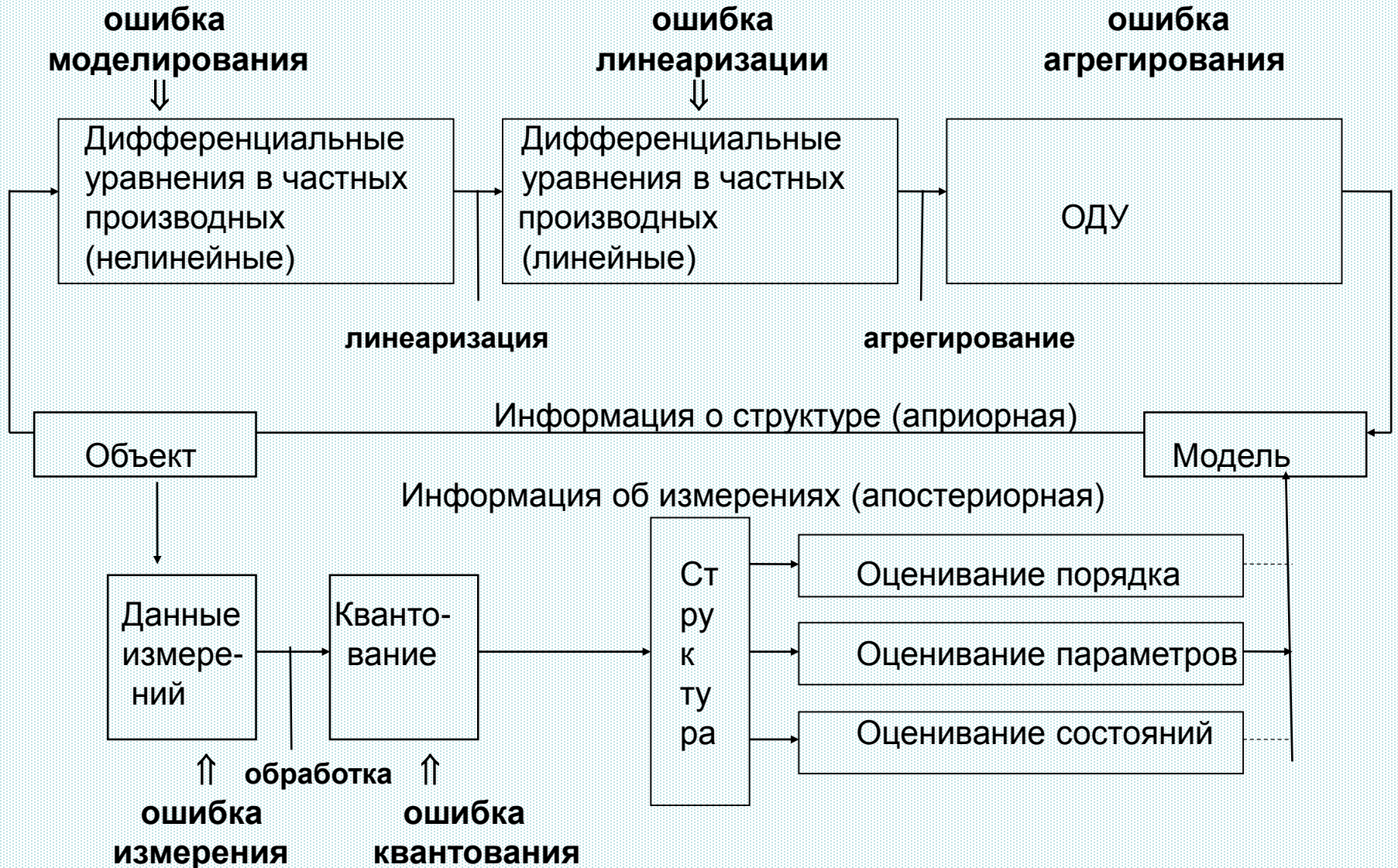
Определить $u(t)$, для которого некоторая оценка $y(t)$ была бы близка к желаемому.

Иерархия моделей.

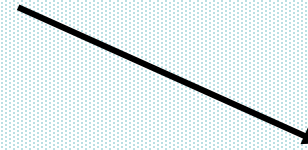
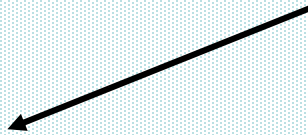


Методология построения детерминированных моделей

Структура



Зависимость



Функциональная

- Функция
- Функционал
- Оператор

Стохастическая

- Регрессия
- Корреляция

Функция

ООФ

ОЗФ

Sx

Sy



Функционал

совокупности функций ставит в соответствие совокупность чисел

$$\int f(x) dx : \quad f(x) = \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ \sqrt{x} \\ \dots \end{cases}$$

Оператор

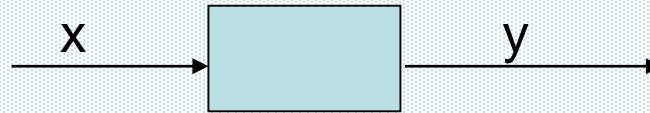
Если заданы два произвольных множества S_x и S_y и дан закон, в соответствии с которым любому x будет соответствовать вполне определенный y , то говорят, что задан оператор.

Функция, Функционал и Оператор – отражают действие причинно-следственной связи.

Стохастическая связь - это такая зависимость, при которой определенному значению x будет соответствовать множество y .

$$x \longleftrightarrow (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

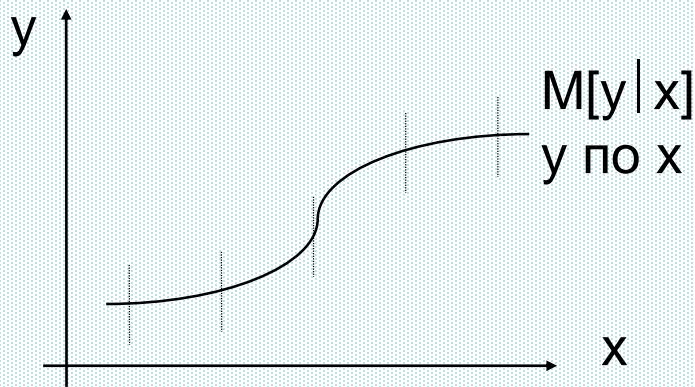
Регрессионный анализ.



Уравнение регрессии - это условное математическое ожидание случайной переменной y , трактуемое как функция от x или функция регрессии y по x .

$$M[y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} y * f(y|x) dy$$

- уравнение регрессии.



Уравнение 1-го рода - теоретическое

Уравнение 2-го рода - экспериментальное

Определение

Оценка рассеивания - это оценка дисперсии $D[y|x] = \sigma_x^2$

Оценкой точности регрессионной модели является дисперсия.

Если $\sigma_x^2 = 0$, то имеет место функциональная зависимость.

$$\begin{aligned}(y - m_y)/\sigma_y &= \rho_{yx} * (x - m_x)/\sigma_x \\ y &= m_y + (\sigma_y/\sigma_x) * \rho_{yx} (x - m_x)\end{aligned}$$

где

$$\rho_{yx} * (\sigma_y/\sigma_x) = b[y|x]$$

- коэффициент линейной регрессии y по x .

Покажем, что минимум достигается тогда, когда функция регрессии 2-го рода совпадает с функцией регрессии 1-го рода.

$$J_y = M\{(y - g(x))^2\} \rightarrow \min$$
$$\partial J / \partial y = 0$$

т.е. \rightarrow МНК

$$J_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - g(x))^2 f(x, y) dy dx$$

$$f(x, y) = f(x) f(y|x)$$

$$J_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - g(x))^2 f(y|x) dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (y - g(x))^2 f(y|x) dy$$

т.к. $\partial J / \partial y = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy = g(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) dy}_{=1 \text{ из условия нормировки}}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy$$

Следовательно $g(x) = \alpha(x)$

Что и требовалось доказать.

МНК.

Матричная форма МНК.

Виды регрессий.

1. Линейный одномерный случай

$$y = a_0 + a_1x$$

2. Параболическая или степенная регрессия

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

3. Линейная множественная регрессия

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$$



$$y(a, x) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} x_1^2 + \dots + a_{2n} x_n^2 + \\ + a_{2n+1} x_1 x_2 + \dots + a_k x_{n-1} x_n$$

$$k+1 = (n+1)(n+2)/2$$

- число неизвестных $\vec{a} = ?$.

МНК имеет три этапа:

1 этап

Определение коэффициентов a .

2 этап

Оценка достоверности коэффициентов a .

3 этап

Проверка адекватности модели.

$\bar{a} = (a_0 \dots a_k)'$ - вектор-столбец

$x = (x_1 \dots x_k)'$ - вектор-столбец

$f(x) = (1, x_1, \dots, x_k)'$

\tilde{y} - наблюдаемые значения, \hat{a} – оценки, \bar{a} - истинные значения

$$\hat{y} = \hat{a}^T * f(x)$$

Эксперимент проводится в N точках, т.о. фиксируем x и y .

x_1, x_2, \dots, x_N - точки экспериментов.

$$x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)' \quad 1 \leq i \leq N$$

$$x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1 \quad \tilde{y}^1$$

.....

$$x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i \quad \tilde{y}^i$$

$$\tilde{y} = (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^N)$$

- вектор наблюдений функции отклика.

Требуемые условия.

1. Результаты наблюдений свободны от систематических ошибок

$$E\{\tilde{y}\} = \bar{y} = F\bar{a}^T$$

$$E\{\tilde{e}\} = 0$$

E - математическое ожидание.

2. Результат наблюдений в точке x^i не зависит от результата наблюдений в точке x^j .

$$E\{(\tilde{y}^i - \bar{y}^i)(\tilde{y}^j - \bar{y}^j)\} = 0$$

$$E\{\tilde{e}^i \tilde{e}^j\} = 0$$

3. Дисперсия результатов наблюдений во всех точках одинакова.

$$D\{\tilde{y}^i\} = \sigma^2 \quad \text{для любых } i.$$

4. Оценка \hat{a} является несмещенной

$$E\{\hat{a}\} = a$$

5. Дисперсия оценки \hat{a}^i должна быть минимальна

$$S = \min S(a) = \sum_{i=1}^N (\tilde{y}^i - y^i)^2 = (\tilde{y} - y)^T * (\tilde{y} - y)$$

$$\hat{y} = F\hat{a}$$

где \hat{a} - оценка, которая еще пока не найдена.

$$\begin{aligned} (\tilde{y} - y)^T * (\tilde{y} - y) &= (\tilde{y} - F\hat{a})^T * (\tilde{y} - F\hat{a}) = \\ &= \tilde{y}^T \tilde{y} + \hat{a}' F' F \hat{a} - 2\tilde{y}' F \hat{a} \end{aligned}$$

Так как

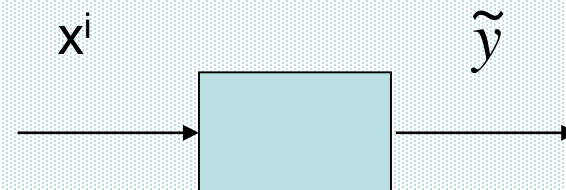
$$\partial S / \partial a = 0$$

то

$$2F'F\hat{a} = 2F' \tilde{y}$$

следовательно

$$\hat{a} = (F'F)^{-1} F' \tilde{y} = CF' \tilde{y}$$



Пример.

Выход у химической реакции зависит от температуры T и времени реакции t .

$$y = \varphi(T, t)$$

$$t = 4 \text{ часа}$$

$$T = 220^\circ\text{C}$$

Зависимость является линейной в окрестностях рабочей точки.

Пусть шаг равен

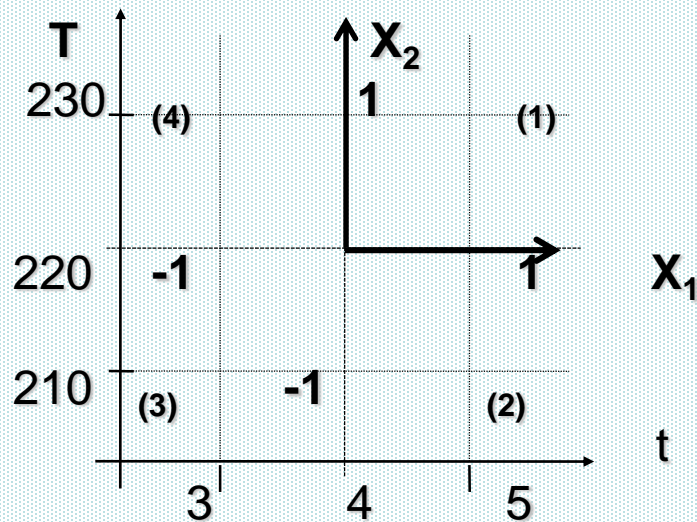
$$t = 4 \pm 1 \text{ час}$$

$$T = 220^\circ \pm 10^\circ \text{ C}$$

Вводим новые координаты

$$x_1 = (t - 4)/1$$

$$x_2 = (T - 220^\circ \text{ C})/ 10^\circ \text{ C}$$



(i) - номер эксперимента.

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

Найти \hat{a}

$$f(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x))'$$

$$f(x) = (1, x_1, x_2)'$$

i	x_1^i	x_2^i
1	1	1
2	1	-1
3	-1	-1
4	-1	1

$$F\{f_j(x^i)\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y} = (65,5; 55; 49,5; 55)'$$

$$\hat{a} = CF' \tilde{y}$$

$$F'F = (3*4)(4*3) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I_3$$

$$C = (F'F)^{-1} = (1/4) * I_3$$

$$\hat{a} = CF' \tilde{y} = (55,1; 5,15; 5,15)'$$

$$y = 55,1 + 5,15x_1 + 5,15x_2$$

- регрессионная модель.

Ошибка оценивания.

Реально \hat{a} отличается от \bar{a} .

Дисперсия - мера отличия. Чем больше дисперсия, тем больше отличие.

Дисперсия будет зависеть как от дисперсии ошибок наблюдения σ^2 , так и от точек постановки опытов.

$$\text{cov}(\hat{a}) = E\{(\hat{a}_i - a_i)(\hat{a}_j - a_j)\} = E\{(\hat{a} - a)(\hat{a} - a)'\}$$

$\text{cov}(\hat{a})$ - ковариационная матрица.

$$\bar{a} = \bar{y}^T C F'$$

Поставим вместо a ее оценку и с учетом условий запишем все необходимые выражения.

$$\text{cov}(\hat{a}) = C F' * \underbrace{E\{(\tilde{y} - y)(\tilde{y} - y)'\}}_{\sigma^2} F C' = C F' F C' \sigma^2 = (F' F)^{-1} (F' F) * C' \sigma^2 = C' \sigma^2 = C \sigma^2$$

Так как корреляционная матрица симметрична, то при

$$\sigma_y^2 = f'(x) C \sigma^2 f(x) \quad \text{- дисперсия коэффициента } a;$$

$$\sigma_{i_i}^2 = C_{ii} \sigma^2$$

Действует нормальный закон распределения.

Действует нормальный закон распределения

$$z = (\hat{a}_i - a_i) / \sigma_i$$

- стандартное отклонение

$$P = \{|z| \leq \varepsilon\} = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) \quad , \text{ где } \Phi(\varepsilon) - \text{ функция Лапласа}$$

$$\alpha \rightarrow P \rightarrow \varepsilon$$

α – уровень значимости (0,1;0,05;0,01)

$$1-\alpha=P$$

P-вероятность, ε – из таблицы интегралов

Пусть $P=0,95$, следовательно $\varepsilon=1,96$

$$|(\hat{a}_i - a_i) / \sigma_i| \leq \varepsilon$$

$$|\hat{a}_i - a_i| \leq \varepsilon \sigma_i = \varepsilon \sigma \sqrt{c_{ii}} \quad , \text{ где } \sigma^2 - \text{ дисперсия ошибки наблюдения.}$$

Если σ^2 задана, то

$$a_i = \hat{a}_i \pm \varepsilon \sigma \sqrt{c_{ii}}$$

$$H_0 : a_i = 0$$

Если $|\hat{a}_i| \leq \varepsilon \sigma_i$, то H_0 имеет место (не отвергается)

Рассмотрим случай, когда неизвестна дисперсия наблюдения σ^2

$$t = |\hat{a}_i - a_i| / S_i$$

S_i - оценка σ_i

Распределение Стьюдента похоже на нормальный закон распределения.

$$S_i = S \sqrt{c_{ii}}$$

S^2 - аналог σ^2

S_i - аналог σ_i

S^2 - эмпирическая дисперсия

$$S(a) = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \tilde{y}_i)^2$$

$\varphi = N - (k+1)$ - число степеней свободы

N - число опытов, $(k+1)$ - число формул

$$S^2 = S(\hat{a}) / \varphi$$

$$t = |\hat{a}_i - a_i| / S_i$$

$$P\{|t| \leq \varepsilon\} = S_{t\varphi}(\varepsilon) - S_{t\varphi}(-\varepsilon)$$

$S_{t\varphi}(\varepsilon)$ и $S_{t\varphi}(-\varepsilon)$ - из таблицы Стьюдента

$$|\bar{a}_i - \hat{a}_i| \leq \varepsilon S_i = \varepsilon S \sqrt{c_{ii}}$$

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 55,1 \\ 5,15 \\ 5,15 \end{bmatrix} \quad y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$$\hat{y} = F\hat{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 55,1 \\ 5,15 \\ 5,15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65,4 \\ 55,1 \\ 44,8 \\ 55,1 \end{bmatrix} \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} 65,5 \\ 55 \\ 44,9 \\ 55 \end{bmatrix}$$

$$S^2 = S_R / \varphi = 4 * 0,01 / (4 - 3) = 0,04$$

где в знаменателе 4 - число опытов, и 3 - число коэффициентов.

отсюда $S = 0,2$

$$C = (F'F)^{-1} = (1/4) * I_3$$

где I_3 - единичная матрица 3-го порядка.

$$S_i = 0,2\sqrt{1/4} = 0,1$$

Пусть

$$\alpha = 0,1 \rightarrow P = 0,9 \rightarrow \varepsilon = 6,3$$

тогда

$$|\hat{a}_i - \bar{a}_i| \leq 6,3 * 0,1 = 0,63$$

$$\hat{a}_i > \varepsilon S_i = 0,63$$

$$\bar{a}_0 = 55,1 \pm 0,6$$

$$\bar{a}_1 = 5,15 \pm 0,63$$

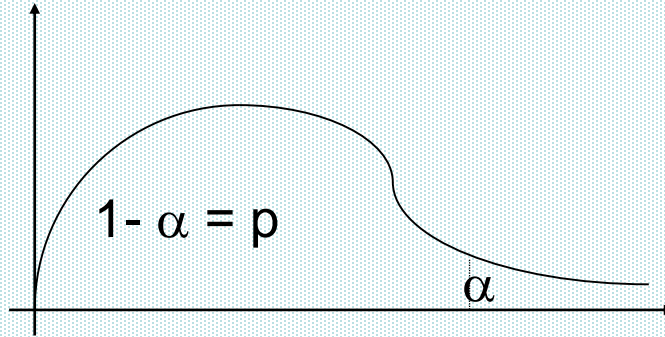
$$\bar{a}_2 = 5,15 \pm 0,63$$

Проверка адекватности модели.

$$H_0: t_p \leq t_{кр}$$

где t_p - расчетное значение

$t_{кр}$ - табличное значение



В основе проверки адекватности модели лежит сопоставление достигнутой точности модели с точностью наблюдения. Для оценки точности используем дисперсию, поэтому необходимо сравнить дисперсию ошибки по модели с дисперсией ошибки наблюдений. Поэтому в каждой точке эксперимент повторяется ν раз.

$$\tilde{y}^{i1}, \dots, \tilde{y}^{i\nu}$$

отсюда следует, что

$$\tilde{y}^i = 1/\nu * \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{y}^{ij}$$

1. Дисперсия ошибки моделирования.

$$S_D = \sum_{i=1}^N v(\hat{y}_i - \tilde{y}_i)^2 = vS_R$$

$$\varphi_1 = N - (k + 1) = N - k - 1$$

2. Дисперсия ошибки наблюдения

$$S_e = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^v (\tilde{y}^{ij} - \tilde{y}^i)^2$$

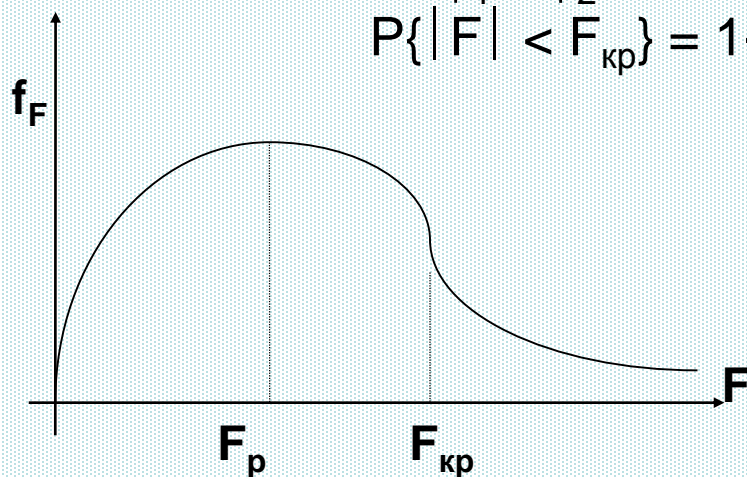
$$\varphi_2 = N * v - N = N(v - 1)$$

Далее рассчитываем статистику Фишера $F_p = (S_D/\varphi_1)/(S_e/\varphi_2)$
Если ошибка моделирования меньше ошибки наблюдения, то модель хорошая.

Выдвигается гипотеза H_0 . Определяется уровень значимости α .

В соответствии с α , φ_1 и φ_2 из таблицы находим $F_{кр}$.

$$P\{|F| < F_{кр}\} = 1 - \alpha$$



Если $F_p \leq F_{кр}$, то модель адекватна.

Пример

i	\tilde{y}^{i1}	\tilde{y}^{i2}	\tilde{y}^{i3}
1	65,5	65,6	65,55
2	55,2	55	55,1
3	44,9	45	44,95
4	55	54,8	54,9

После расчетов

$$N=4 \quad k=2 \quad v=2$$
$$\varphi_1 = N - (k+1) = 4 - 3 = 1$$
$$\varphi_2 = vN - N = 4$$

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 55,125 \\ 5,2 \\ 5,1 \end{bmatrix} \quad \hat{y} = F\hat{a} = \begin{bmatrix} 65,425 \\ 55,225 \\ 44,825 \\ 55,025 \end{bmatrix}$$

$$S_D = \sum_{i=1}^N v(\tilde{y}^i - \hat{y}^i)^2 = 0,125$$

$$S_e = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^v (\tilde{y}^{ij} - \tilde{y}^i)^2 = 0,05$$

Из таблицы распределения Фишера для $\alpha=0,01$ находим значения φ_1 и φ_2 и извлекаем из таблицы соответствующее значение $F_{кр}$.

$$\varphi_1 = 1 \quad \varphi_2 = 4 \quad F_{кр} = 21,2$$

Найдем F_p
$$F_p = (S_D/\varphi_1)/(S_e/\varphi_2) = (0,125/1) / (0,05/4) = 10$$

Сравним расчетное и критическое значения $F_p = 10 < F_{кр} = 21,2$, т.е. модель адекватна.

Планирование эксперимента

Основные понятия.

- **Активный эксперимент**
- **Пассивный эксперимент**

Основная идея активного эксперимента - добиться требуемых свойств, выбирая условия проведения эксперимента.

1. План эксперимента X

$$1 \leq j \leq n \quad 1 \leq i \leq N$$

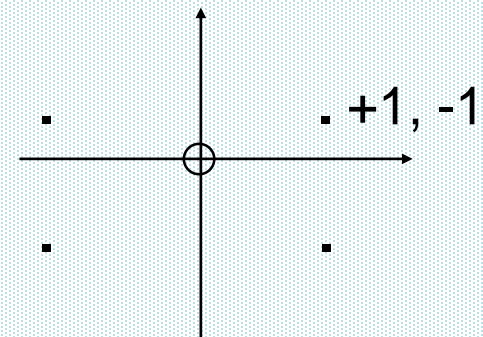
n - число факторов, N - число экспериментов

$$x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)'$$

$$X = x_j^i = \begin{bmatrix} x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1 \\ x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2 \\ \vdots \\ x_1^N, x_2^N, \dots, x_n^N \end{bmatrix}$$

2. Центр плана

$$X^0 = N^{-1} * \sum_{i=1}^N x^i$$



3. Центральный план

- это план, в котором центр расположен в начале координат.

4. Область определения. Нормированные переменные.

Пусть

x_j^* - реальные факторы

x_j - нормированные факторы

$$-1 \leq x_j \leq 1$$

$$1 \leq j \leq n$$

n - факторы

Надо определить $x_{j \min}^*$ и $x_{j \max}^*$

$$x_j = [x_j^* - (x_{j \min}^* + x_{j \max}^*)/2] / [(x_{j \max}^* - x_{j \min}^*)/2]$$

5. Матрица $M = F'F$

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

$$\hat{a} = (F'F)^{-1} F' \tilde{y}$$

$$f = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|l} \hline \text{план} \\ \hline \text{экспе-} \\ \hline \text{римен-} \\ \hline \text{та} \\ \hline \end{array}$$

M - информационная матрица плана X размерности $(k+1) \times (k+1)$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

где λ - корни характеристического уравнения.

$$M = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

План X, которому соответствует диагональная информационная матрица, называется ортогональным.

Если при применении МНК какие-либо коэффициенты a оказываются незначимыми, то в общем случае необходимо произвести перерасчет коэффициентов для новой модели.

Если использовался критерий ортогональности плана, то замена на 0 любого коэффициента в уравнении модели не изменит оценок других коэффициентов.

Преимущества ортогонального плана:

- а) упрощение вычислений
- б) независимые коэффициенты оценок

6. Свойство ротатабельности

План X является ротатабельным, если дисперсия оценки $\hat{y}(\sigma_y^2)$ зависит только от расстояния точки x от центра плана.

Пример

Пусть модель

$$y(a, x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$x^0 = 0$ - центр плана

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M = 4I_3$$
$$\sigma_{\hat{y}}^2 = f'(x)(F'F)^{-1} f(x)$$

$$f(x) = (1, x_1, x_2)$$

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = (1, x_1, x_2) * (1/4) I_3 \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1/4)(1 + x_1^2 + x_2^2) =$$
$$= (1/4)(1 + r^2)$$

Дисперсия всех равноудаленных точек одинакова.

7. План X называется ненасыщенным, если $N > k+1$;
насыщенным, если $N = k+1$

8. Критерий планирования эксперимента.

План эксперимента зависит от выбранного критерия. Критерий в основном определяет либо требования к модели, либо требования к точности.

Кроме критериев ортогональности и ротатабельности назовем критерии А-оптимальности и D-оптимальности.

Критерий А-оптимальности требует такого выбора плана X , при котором матрица C имеет минимальный след (т.е. сумма диагональных элементов минимальна). Практически это означает минимизацию средней дисперсии оценок коэффициента a .

Критерий D-оптимальности требует такого расположения точек, при котором определитель матрицы C минимален.

Полный (простой) факторный эксперимент.

Факторы - число n ($n=3$)

Уровни (2) - (значения факторов - +1, -1)

2^n - полный факторный эксперимент

2^{n-p} - дробный эксперимент, где p - число генераторов

Пусть есть факторы x_1, x_2, x_3

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 = x_1 * x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$2^{3-1}=4 \quad n=3 \quad p=1$$

(вместо восьми)

Планы для квадратичных моделей.

Композиционный план второго порядка

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2 + a_6x_3^2 + \\ + a_7x_1x_2 + a_8x_1x_3 + a_9x_2x_3$$

$(n+1)*(n+2)/2 = 10$ - количество коэффициентов.

	x_1	x_2	x_3
1	1	1	1
2	1	1	-1
3	1	-1	1
4	1	-1	-1
5	-1	1	1
6	-1	1	-1
7	-1	-1	1
8	-1	-1	-1

$$2^3 = 8$$

9	0	0	0	- центр плана
10	$+\alpha$	0	0	} - 2n звездных точек
11	$-\alpha$	0	0	
12	0	$+\alpha$	0	
13	0	$-\alpha$	0	
14	0	0	$+\alpha$	
15	0	0	$-\alpha$	

Звездные точки обычно выбирают так, чтобы обеспечить ортогональность получаемого плана

Понятие рандомизации.

Рандомизация заключается в том, что планируемые опыты выписываются в логическом порядке, а затем их номера случайным образом перемешиваются. И именно в таком случайном порядке они и производятся.

Главные эффекты и взаимодействия.

Фактор А	Код А	Фактор В	Код В	Отклик
A_0	x_0	B_0	y_0	$z(x_0, y_0)$
A_1	x_1	B_0	y_0	$z(x_1, y_0)$
A_0	x_0	B_1	y_1	$z(x_0, y_1)$
A_1	x_1	B_1	y_1	$z(x_1, y_1)$

Из таблицы нас интересует эффект фактора А (или В) - главный эффект, и взаимодействие между факторами А и В .

Главный эффект фактора А пропорционален разности между:

а) средним значением по всем откликам, включающим обработку фактора А на верхнем уровне (A_1).

б) средним значением по всем откликам из комбинации обработок, включающих нижний уровень фактора А (A_0).

$$\left\{ \begin{array}{l} A = [z(x_1, y_0) + z(x_1, y_1)]/2 - [z(x_0, y_0) + z(x_0, y_1)]/2 \\ \text{аналогично для В} \end{array} \right.$$

- определяется какой из факторов весомее.

Эффект взаимодействия между А и В пропорционален разности между:

а) эффектом увеличения А при В, зафиксированном на верхнем уровне;

б) эффектом увеличения А при В, зафиксированном на нижнем уровне.

Пусть

число уровней - 4; число факторов - 3;

Тогда число опытов - $4^3 = 64$.

Греко-латинские квадраты.

Латинский квадрат.

Пусть имеются 3 фактора - P, L, S, и 4 уровня - $i = 1, 2, 3, 4$.

	P_1	P_2	P_3	P_4
L_1	S_1	S_2	S_3	S_4
L_2	S_2	S_3	S_4	S_1
L_3	S_3	S_4	S_1	S_2
L_4	S_4	S_1	S_2	S_3

В каждой строке и в каждом столбце S_i
встречается только один раз.

16 вместо 64.

Греко-латинский квадрат - это то же самое, что латинский, но с обобщением на 4 фактора.

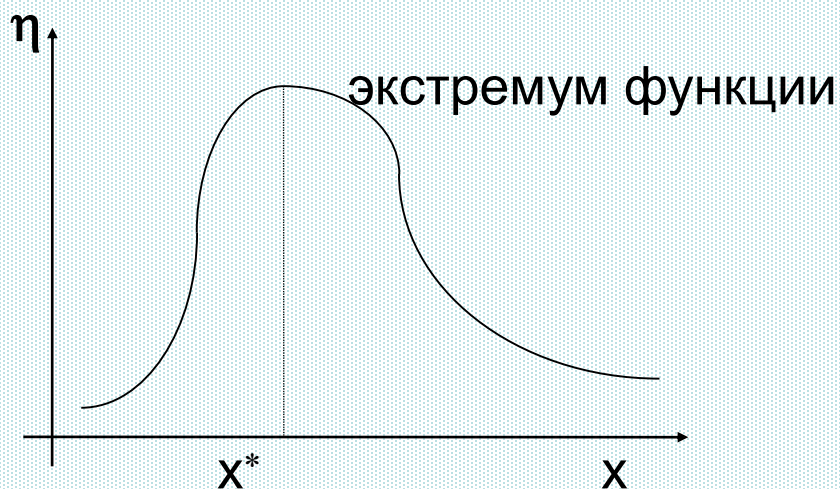
A_α	B_β	C_γ	D_ϕ
B_β	C_γ	D_ϕ	A_α
C_γ	D_ϕ	A_α	B_β
D_ϕ	A_α	B_β	C_γ

Метод экспериментальной оптимизации.

Эти процедуры применяются при поиске оптимальных условий либо на объекте, либо на вычислительной машине, т.е. модель нам неизвестна.

$$\eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

η - функция отклика; x_1, x_2, \dots, x_k - факторы.



$$\eta \rightarrow \underset{x_1, x_2, \dots, x_k}{extr}$$

x^* - оптимальное решение

($k+1$)-мерное пространство

Пусть область определения G замкнута и ограничена.

η - унимодальная функция.

Метод Бокса-Уилсона.

Идея метода заключается в использовании метода крутого восхождения в сочетании с последовательно планируемым факторным экспериментом для нахождения оценки градиента.

Процедура состоит из нескольких повторяющихся этапов:

- построение факторного эксперимента в окрестностях некоторой точки;
- вычисление оценки градиента в этой точке по результатам эксперимента;
- крутое восхождение в этом направлении;
- нахождение максимума функции отклика по этому направлению.

Допущения:

- функция отклика непрерывна и имеет непрерывные частные производные на множестве G ;
- функция унимодальная (т.е. экстремум - внутренняя точка).

$$\vec{X}^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_k^m)$$

m – номер итерации

$$\vec{X}^{m+1} = \vec{X}^m + \alpha * \text{grad}\eta(\bar{X}^m)$$

$$\max_{\alpha} \eta(\bar{X}^m + \alpha * \text{grad}\eta(\bar{X}^m))$$

α влияет на шаг.

$$\text{grad}\eta(\bar{X}^m) = (\partial\eta / \partial x_1; \partial\eta / \partial x_2; \dots; \partial\eta / \partial x_k) = \nabla$$

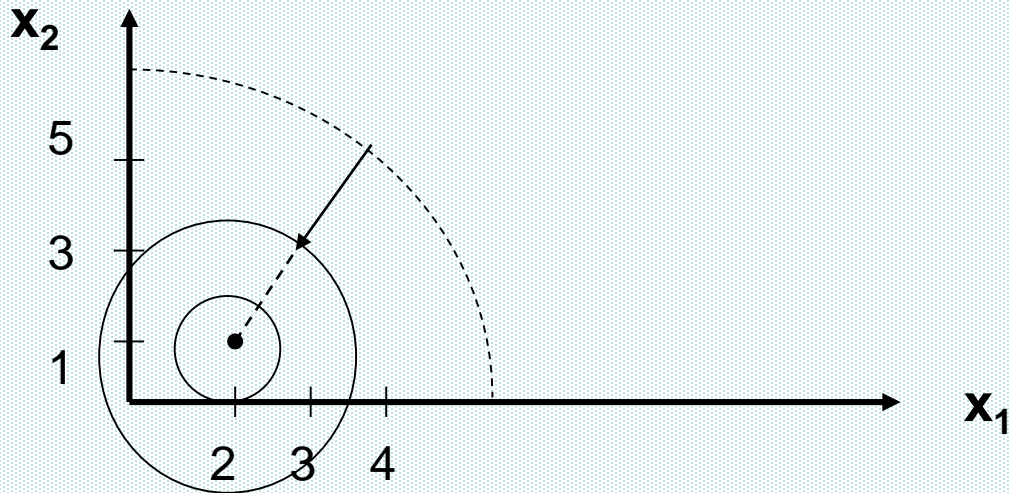
- оператор Набла

$$x_i^{m+1} = x_i^m + \alpha * \partial\eta / \partial x_i^m$$

Δx нужно подсчитать

Пример (на градиентный метод)

\bar{x} $\max f(x) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$
= (4, 5) - исходная точка.



$$\Delta \eta = f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^0)$$

$$\Delta \eta / \Delta x = (f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^0)) / \Delta x$$

$$\Delta x = \alpha * \text{grad}f(\bar{x})$$

- общий вид $\Delta \eta / \alpha \text{grad}f(\bar{x}^0) = \text{grad}f(\bar{x}^1)$

$$\Delta \eta / \alpha = \nabla f(x^0) \nabla f(x^1)$$

$$\partial f / \partial x_1 = 4 - 2x_1$$

$$\partial f / \partial x_2 = 2 - 2x_2$$

$$\nabla f(x^0) = (4 - 2 \cdot 4, 2 - 2 \cdot 5) = (-4, -8)$$

- градиент в точке x^0

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^0 - \alpha * \text{grad}f(\bar{x}^0) = (4 - 4\alpha, 5 - 8\alpha)$$

$$\text{grad}f(\bar{x}^1) = [4 - 2(4 - 4\alpha), 2 - 2(5 - 8\alpha)] = [-4 + 8\alpha, -8 + 16\alpha]$$

$$d\Delta\eta / d\alpha = \nabla f(\bar{x}^0) \nabla f(\bar{x}^1) = [(-4 + 8\alpha) * (-4) + (-8 + 16\alpha) * 8] = 80 - 160\alpha = 0$$

$$\alpha_0 = 0,5$$

$$\bar{x}^1 = (4 - 4 * 0,5; 5 - 8 * 0,5) = (2; 1)$$

Вторая итерация

$$\bar{x}^1 = (2; 1)$$

$$\text{grad}f(\bar{x}^1) = [(4 - 2x_1), (2 - 2x_2)] = (4 - 2 * 2, 2 - 2 * 1) = (0, 0)$$

$$f(\bar{x}^1) = 8 + 2 - 4 - 1 + 5 = 10$$

т.е. точка \bar{x}^1 - решение задачи

Оценивание градиента.

Если функция $\eta(x_1, x_2, \dots, x_k)$,

где x_1, x_2, \dots, x_k - размерные величины, то перейдем к безразмерному виду:

$f(x_1, x_2, \dots, x_k)$,

где x_1, x_2, \dots, x_k - безразмерные величины.

Разложим эту функцию в ряд Тейлора в точке 0.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)_0 + \sum_{i=1}^k (\partial f / \partial x_i) * x_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j) * x_i x_j + 0 \dots$$

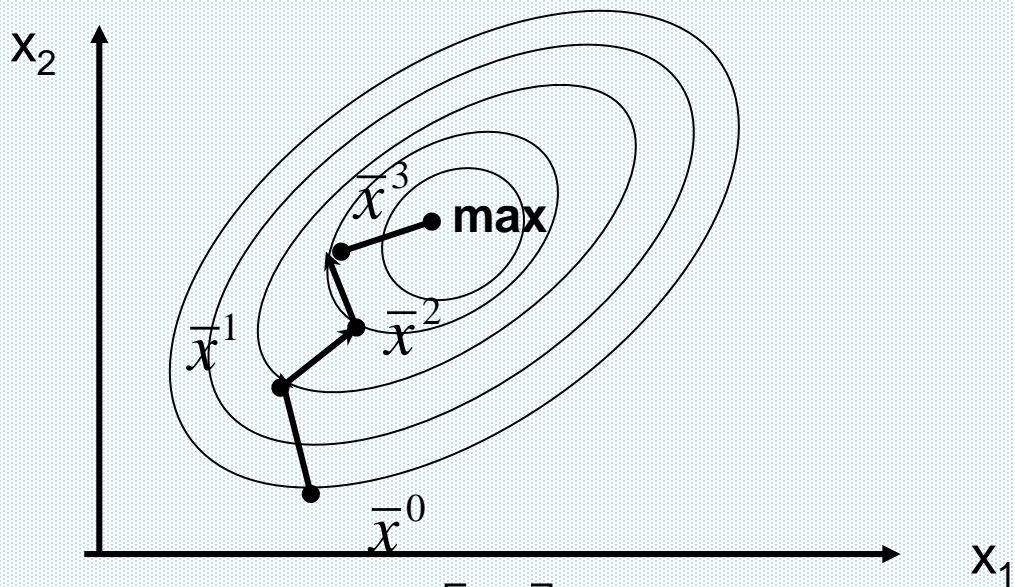
Для линейной зависимости.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k$$

где

$$a_i = \partial f / \partial x_i \quad i = 1 \dots k \quad i \neq 0$$

$$a_0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)_0$$



$$\epsilon = CF' \tilde{y} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix}$$

- из регрессионной модели

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix}$$

- из разложения в ряд Тейлора

Проведя факторный эксперимент и расчет коэффициента линейной множественной регрессионной модели, мы получаем возможность оценить компоненты градиента.